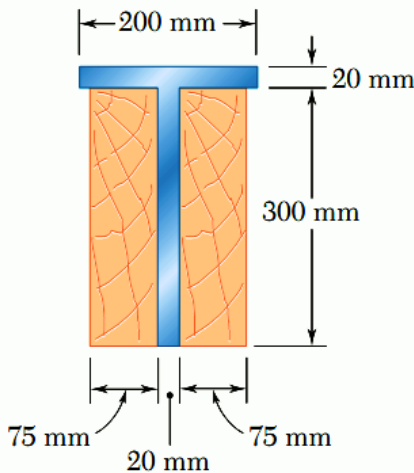




مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)

مسئله نمونه ۴-۳



دو ورق فولادی به صورت یک سپری به یکدیگر جوش شده اند و برای تقویت آنها از دو قطعه چوب بلوط که به آن پیچ شده اند استفاده کرده ایم. مدول الاستیسیته برای چوب ۱۲٫۵ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. چنانچه گشتاور خمشی $M = ۵۰ \text{ kN}\cdot\text{m}$ به این تیر مرکب وارد شود، (الف) بیشترین تنش در چوب، و (ب) تنش ایجاد شده در لبه بالایی ورق فولادی را محاسبه کنید.

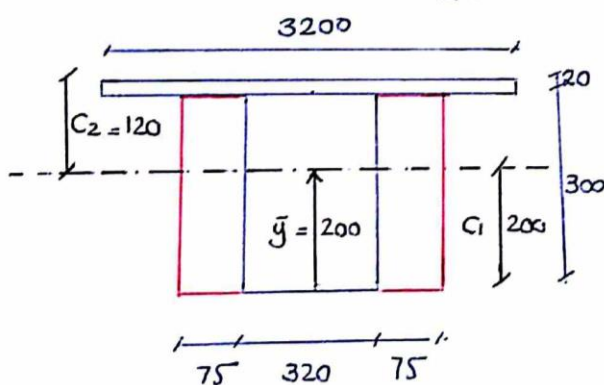
استراتژی حل مسئله: سطح سیر ابتدا به مقطع تیری که از یک ماده ساخته شده، تبدیل می شود که می تواند از چوب یا فولاد باشد. پس از آن موقعیت مرکز دوار سطح دمان اینرسی حول محله گذرا از مرکز دوار سطح می باشد می شود. درکفایت تنش های مورد نیاز با توجه به جنس اصلی مصالح تعیین می گردد.

مساوی:

مقطع معادل: ابتدا نسبت شکل (۱) نسبت به مصالح می شود.

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12.5 \text{ GPa}} = 16$$

بنابراین برای مقطع معادل با مدعین درج های فولادی ۱۶ برابر شود.



تعیین موقعیت باررضی: شکل شماره Fig. 1

تبدیل یافته را نشان می دهد. موقعیت تاررضی خمشی از

مرکز دوار سطح تبدیل یافته عبور می کند. بنابراین داریم

Area	A_i	$\bar{y}_i$	$A_i \bar{y}_i$
1	141×10^3	150	21.15×10^6
2	64×10^3	310	19.84×10^6
Σ	205×10^3		41.0×10^6

اجاد بر حسب mm

$$A_1 = (470 \times 300) = 141 \times 10^3$$

$$A_2 = 3200 \times 20 = 64 \times 10^3$$

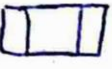
$$\bar{y} = \frac{\Sigma A_i \bar{y}_i}{\Sigma A_i} = \frac{41 \times 10^6}{205 \times 10^3} \Rightarrow \bar{y} = 200 \text{ mm}$$



مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)

محاسبه میان اینی حول محور ضعیف تر.

Area	$A_i (mm^2)$	$dy_i (mm)$	$A_i (dy_i)^2$	$\bar{I} = bh^3/12$
 (1)	141×10^3	$200 - 150 = +50$	352.5×10^6	1057.5×10^6
 (2)	64×10^3	$200 - 310 = -110$	774.4×10^6	2.13×10^6
Σ	205×10^3		1126×10^6	1060×10^6

$$I = \Sigma \bar{I} + A dy^2 = 1060 \times 10^6 + 1126 \times 10^6$$

$$I = 2186 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$c_1 = \bar{y} = 200 \text{ mm} ; \quad \bar{c}_2 = 300 + 20 - \bar{y}$$

$$c_1 = 200 \text{ mm} ; \quad c_2 = 120 \text{ mm}$$

نقطه ضعیف . با محاسبه بیشترین فاصله از آ ر ضعیف برای فولاد (c_2) در فشار و چوب (c_1) داریم:

$$\sigma_w = \frac{M c_2}{I} = \frac{50 \times 10^8 (N \cdot mm) \times 200 (mm)}{2186 \times 10^6 (mm^4)} = 4.57 \text{ MPa (T)}$$

$$\sigma_s = n \frac{M c_1}{I} = 16 \times \frac{50 \times 10^8 (N \cdot mm) \times 120 (mm)}{2186 \times 10^6 (mm^4)} = 43.9 \text{ MPa (C)}$$



مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)

سویقیت تارخشی: تارخشی عمن از مکاندار سطح تبدیل یا فته عبوری کند. بنابراین:

$$bx \left(\frac{x}{2} \right) - n A_s (d-x) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} b x^2 + n A_s x - n A_s d = 0$$

$$\frac{1}{2} (12) x^2 + 4.95 x - 4.95 x (5.5 - 1.5) = 0 \quad \therefore x = 1.45 \text{ in.}$$

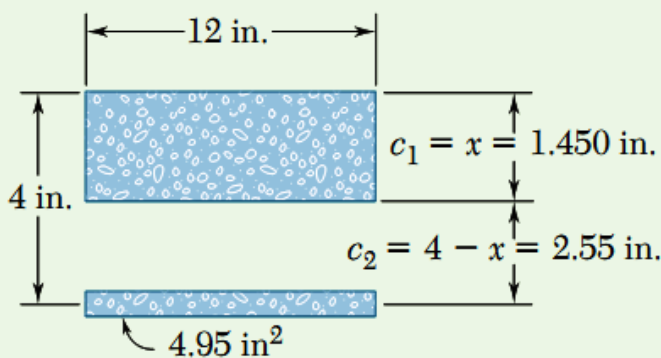


Fig. 2 Dimensions of transformed section used to calculate moment of inertia.

معادله معادله اینرسی

$$I = \frac{1}{3} b x^3 + n A_s (d-x)^2$$

$$I = \frac{1}{3} \times 12 \times 1.45^3 + 4.95 (4 - 1.45)^2$$

$$I = 44.4$$

معادله معادله اینرسی بتن و فولاد:

$$\sigma_c = \frac{M c_1}{I} = \frac{40 \times 1.45}{44.4} = 1.306 \text{ ksi}$$

$$\sigma_s = n \frac{M c_2}{I} = 8.06 \times \frac{40 \times 2.55}{44.4} = 18.52 \text{ ksi}$$

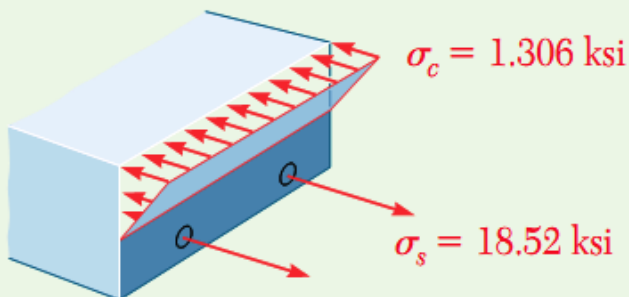


Fig. 3 Stress diagram.

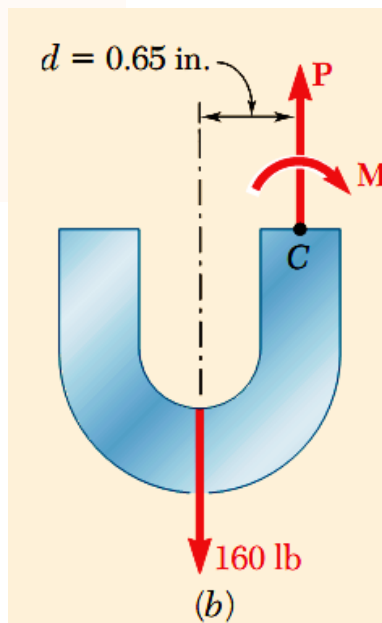
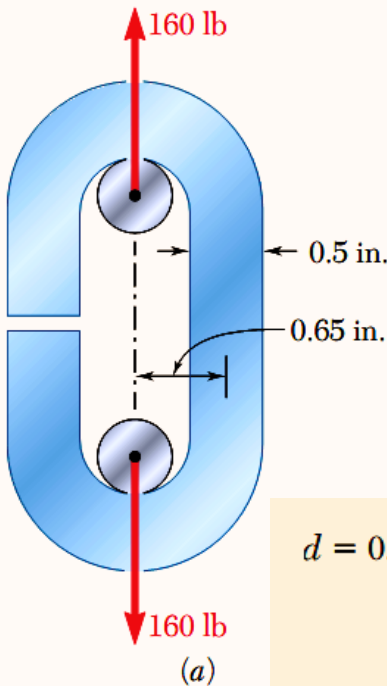
نکته: از آنجا که مقطع تبدیل یافته تماماً براساس بتن است باید به خاطر داشت برای همه تنش میلگرها، مقدار آن در

عدد n ضرب می شود. در واقع تفاوت بین رزیدینس بتن و فولاد به خاطر تفاوت آنها در مدول الاستیک است.



مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)



کاربر محترم در حل مسئله (۴.۷)

مطابق شکل یک زنجیر از حلقه های فولاد کم کردن به قطر $\frac{1}{2}$ in. ساخته می شود. نیروی نیروی 160 lb به حلقه های این زنجیر اعمال می شود. مطلوب است: (a) تنش کششی و فشاری در قسمت متعین یک حلقه، و (b) فاصله بین مرکزوار سطح و تارخشی خمش

(a) بیشترین تنش های کششی و فشاری در قسمت متعین حلقه با توجه به شکل (4.43b) نیروهای داخلی در مقطع مورد نظر عبارتند از

$$P = 160 \text{ lb} \quad \text{نیروی محوری}$$

$$M = 160 \times 0.65 = 104 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \text{گشتاور خمشی}$$

توزیع تنش های حاصل از P و M به ترتیب در شکل های (4.43c) و (4.43d) ترسیم شده است. تنش حاصل از نیروی محوری P یک یکنواخت است؛ یعنی داریم:

$$A = \pi C^2 = \pi \times 0.5^2 = 0.7854 \text{ in}^2$$

$$\sigma_s = \frac{P}{A} = \frac{160}{0.7854} = 203.7 \text{ (psi)}$$

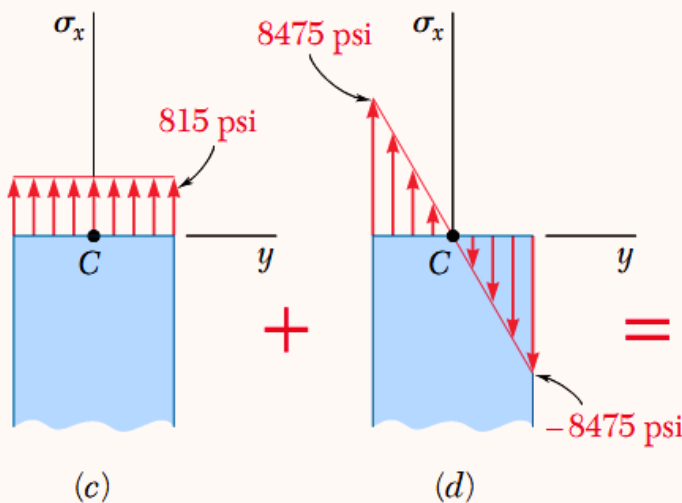
توزیع تنش حاصل از گشتاور خمشی خطی است و داریم:

$$\sigma_m = \frac{M c}{I}$$

$$I = \frac{\pi}{4} C^4 = \frac{\pi}{4} \times (0.5^4) = 0.09817 \text{ in}^4$$

$$\sigma_m = \frac{M c}{I} = \frac{104 \text{ (lb} \cdot \text{in)} \times 0.25 \text{ (in)}}{0.09817 \text{ (in}^4)}$$

$$\sigma_m = 2647.5 \text{ (psi = } \frac{\text{lb}}{\text{in}^2})$$





مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس‌های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

صورت اول برهم نمی باجم بتن این در توزیع تنش به توزیع تنش کل در شکل (4.43e) می‌سیم.
بیشترین تنش‌های کششی و فشاری در مقطع عبارتند از:

$$\sigma_t = \sigma_o + \sigma_m = 815 + 8475 = 9290 \text{ psi}$$

$$\sigma_c = \sigma_o - \sigma_m = 815 - 8475 = -7660 \text{ psi}$$

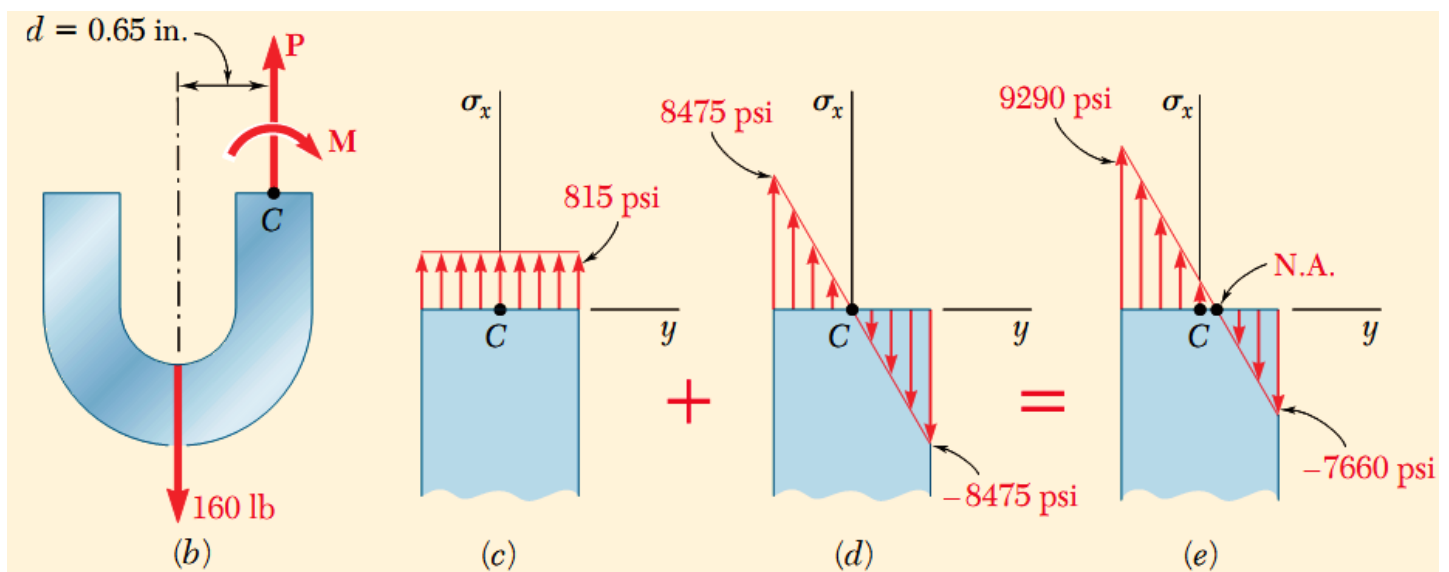


Fig. 4.43 (a) Open chain link under loading. (b) Free-body diagram for section at C. (c) Axial stress at section C. (d) Bending stress at C. (e) Superposition of stresses.

ناصبه بین تارخشی و کشش و مرکز دایره سطح

$$\sigma_x = \sigma_o - \frac{My}{I} \quad \sigma_x = 0 \Rightarrow y = y_o$$

$$\sigma_o - \frac{My_o}{I} = 0 \Rightarrow \frac{P}{A} - \frac{My_o}{I} = 0 \Rightarrow y_o = \frac{PI}{MA}$$

$$y_o = \frac{160 \times 3.068 \times 10^{-3}}{104 \times 0.1963} = 24 \times 10^{-3} \text{ in.} \Rightarrow y_o = 0.024 \text{ in.}$$

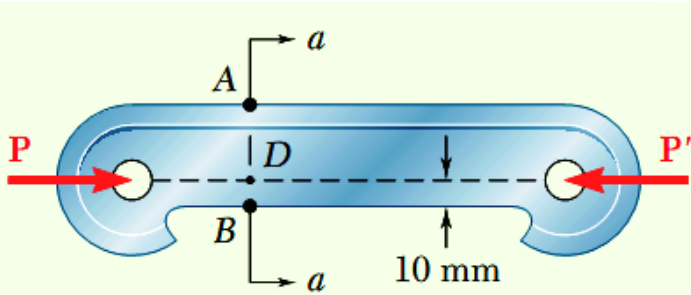


مقاومت مصالح (۱) - تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد - واحد اصفهان)

سوال نمونه (۴.۸)

عصر رابط نشان داده شده در شکل از جنس آلومینیم با تنش مجاز 30 MPa در کشش و 120 MPa در فشار ساخته شده است. حداکثر مقدار بار برای نیروی P را می بینید و ویژگی های مقطع T شکل در شکل (۴.۲) مشاهده است.



استراتیژی حل مسئله: برای می سب ما یک سیستم تنش می نویسیم باید تنش های حاصل از نیروی محوری و گشتاور خمشی را در اثر بردن محوری بار به صورت جداگانه محاسبه و نسبت اصل بر هم کنی با هم جمع بسته شوند. با توجه به این که مقطع رابط متقارن نسبت به محور است باید در محاسبه P ما یک تنش های کششی و فشاری مورد توجه قرار گیرند.

خواص سطح مقطع عنصر رابط: مقطع عنصر در شکل (۱) از سوال نمونه (۴.۲) آورده شده است. با توجه به این سوال داریم:

$$A = 3000 \text{ mm}^2$$

$$I = 868 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\bar{Y} = 38 \text{ mm}$$

اکنون با توجه به شکل (۲) فاصله d را محاسبه می کنیم:

$$d = 38 - 10 = 28 \text{ mm}$$

d فاصله نقطه D (محور خورده) تا C (محور واسطه) است.

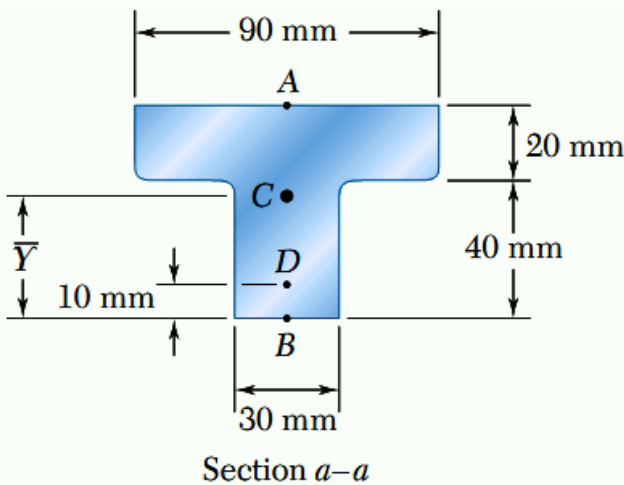


Fig. 1 Section geometry to find centroid location.

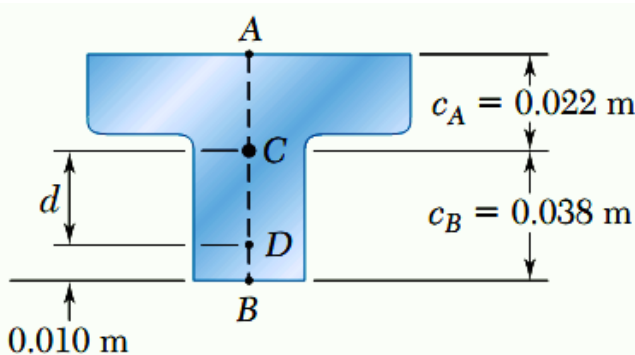


Fig. 2 Dimensions for finding d .



مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)

سیستم نیرو-گوشه هم ارز (معادل) در نقطه C

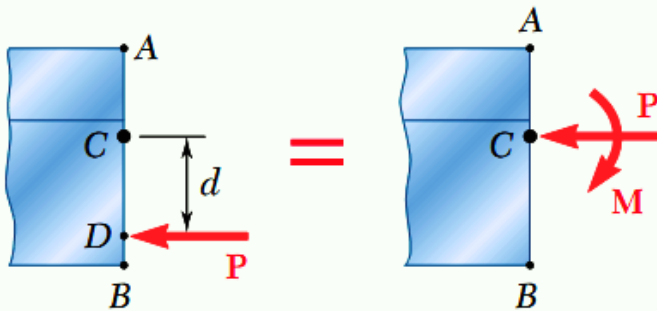


Fig. 3 Equivalent force-couple system at centroid C.

با توجه به شکل (۲) می توانیم نیروی P را از D به C انتقال دهیم و در عوض گشتاور حاصل از آن را در D اضافه کنیم. پس d فاصله بین نیرو با مرکز سطح و به عبارتی بردن نیروی P نسبت به مرکز دایر سطح است:

$$P = P \quad \text{و} \quad M = P \times d = P \times 28 = 28P$$

الکون مطابق شکل (۴) ابتدا نیروی P و سپس گشتاور M را به مقطع وارد می کنیم. در حالت اول توزیع تنش یکنواخت

در حالت دوم به صورت خطی است.

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{P(N)}{3000(mm)} = \frac{P}{3 \times 10^3} (MPa) \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_{1,A} = \frac{Mc_A}{I} = \frac{28P \times 22}{868 \times 10^3} = \frac{0.710P}{10^3} (MPa) \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_{1,B} = \frac{Mc_B}{I} = \frac{28P \times 38}{868 \times 10^3} = \frac{1.226P}{10^3} (MPa) \quad (\text{فشاری})$$

استفاده از اصل برهم نهی. الکون ماکزیمم تنش در نقاط A

و B محاسبه می شود. تنش های کششی با علامت مثبت و

فشاری با علامت منفی در می سبابت وارد می شوند:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = 377P \times 10^{-6} (MPa)$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -1559P \times 10^{-6} (MPa)$$

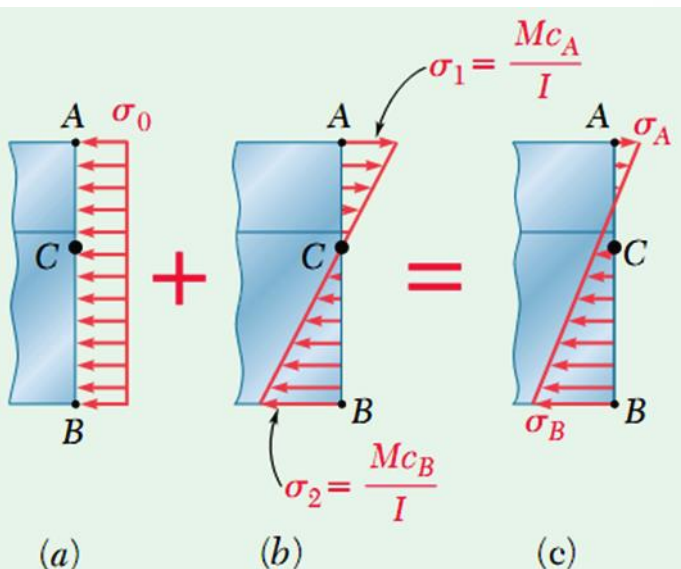


Fig. 4 Stress distribution at section C is superposition of axial and bending distributions.



مقاومت مصالح (۱)- تمرینات تکمیلی فصل چهارم: خمش خالص (ویژه کلاس های مجازی)

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد- واحد اصفهان)

ماکزیم نیروی مجاز برای (P)

ابتداء در حالت کشش مقدار تنش را با تنش مجاز مساوی قرار می دهیم. در این صورت

$$377 \times 10^{-6} P = 30 \text{ (MPa)} \Rightarrow P = 79.6 \times 10^3 \text{ (N)}$$

$$\text{در حالت فشاری داریم: } -1559 \times 10^{-6} P = 120 \text{ (MPa)} \rightarrow P = 77.0 \times 10^3 \text{ (N)}$$

بنابراین بیشترین مقدار نیرو برای آنکه تنش ها از مقدار مجاز فراتر نرود: $P = 77 \times 10^3 \text{ N}$ است

$$P = 77.0 \text{ kN}$$